Das Ikosaeder

Walter Fendt

27. Februar 2005

1 Grundlagen: Das gleichseitige Dreieck

Satz 1

Für ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a gelten folgende Formeln:

Höhe

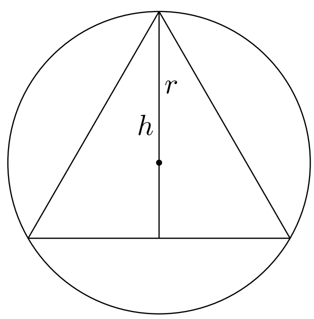
$$\boxed{h = \frac{a}{2}\sqrt{3}}$$

Umkreisradius

$$\boxed{r = \frac{a}{3}\sqrt{3}}$$

Flächeninhalt

$$\boxed{A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}}$$



Gleichseitiges Dreieck mit Höhe und Umkreis

2 Grundlagen: Die eulersche Polyederformel

Satz 2

Für die Anzahlen der Ecken (e), der Flächen (f) und der Kanten (k) eines beliebigen konvexen Polyeders gilt folgende Beziehung:

Eulersche Polyederformel

$$\boxed{e + f = k + 2}$$

Bemerkung: Der Begriff *Polyeder* (Vielflächner) bezeichnet einen Körper, der von Vielecken (Polygonen) begrenzt wird. *Konvex* bedeutet, dass eine beliebige Verbindungsstrecke von zwei Punkten des Polyeders stets vollständig innerhalb des Polyeders liegen muss. Alle Ecken müssen also nach außen gerichtet sein.

3 Definition und einfache Eigenschaften

Definition 1

Ein **Ikosaeder** (von griechisch *eikosáedron* für Zwanzigflächner) ist ein konvexes Polyeder, das von kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, wobei in jeder Ecke fünf Flächen zusammentreffen.

Bemerkung 1: Grundsätzlich wäre es denkbar, dass ein Körper mit den geforderten Eigenschaften gar nicht existiert. Auf den Nachweis der Existenz wird hier jedoch verzichtet.

Bemerkung 2: Zwei verschiedene Ikosaeder sind in jedem Fall zueinander ähnlich. Daher spricht man häufig von *dem* Ikosaeder, als ob es nur ein einziges gäbe.

Bemerkung 3: Das Ikosaeder gehört – zusammen mit dem regelmäßigen Tetraeder, dem Hexaeder (Würfel), dem Oktaeder und dem Dodekaeder – zu den fünf **platonischen Körpern**.

Satz 3

Jedes Ikosaeder besitzt 12 Ecken, 30 Kanten und 20 Flächen.

Beweis (nach [2]): Ist e die Anzahl der Ecken, so lässt sich auch die Zahl der Flächen (f) durch e ausdrücken. Würde man allerdings einfach die Eckenzahl mit der Zahl der Flächen pro Ecke multiplizieren ($e \cdot 5$), so würde man jede Fläche dreifach zählen, nämlich je einmal für jede ihrer Ecken. Daher muss man noch durch 3 dividieren. Für die Zahl der Flächen ergibt sich folglich $f = \frac{5}{3}e$.

Eine entsprechende Überlegung ist für die Zahl der Kanten (k) möglich. Da eine Kante zwei Ecken enthält und in jeder Ecke fünf Kanten zusammentreffen, muss $k = \frac{5}{2}e$ gelten.

Setzt man die gefundenen Rechenausdrücke in die eulersche Polyederformel $e + f = k + 2$ (siehe Satz 2) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} e + \tfrac{5}{3}e &= \tfrac{5}{2}e + 2 \\ \tfrac{1}{6}e &= 2 \\ e &= 12 \end{aligned}$$

Aus diesem Ergebnis folgt nun sofort:

$$\begin{aligned} f &= \tfrac{5}{3}e = \tfrac{5}{3} \cdot 12 = 20 \\ k &= \tfrac{5}{2}e = \tfrac{5}{2} \cdot 12 = 30 \end{aligned}$$

4 Symmetrieeigenschaften

Satz 4

Ebenensymmetrie: Ein Ikosaeder hat 15 Symmetrieebenen. Jede Symmetrieebene enthält zwei gegenüber liegende Kanten und die Symmetrieachsen von vier Dreiecksflächen. Auf einer Symmetrieebene liegen daher stets vier Ecken, vier Kantenmittelpunkte und vier Flächenmittelpunkte.

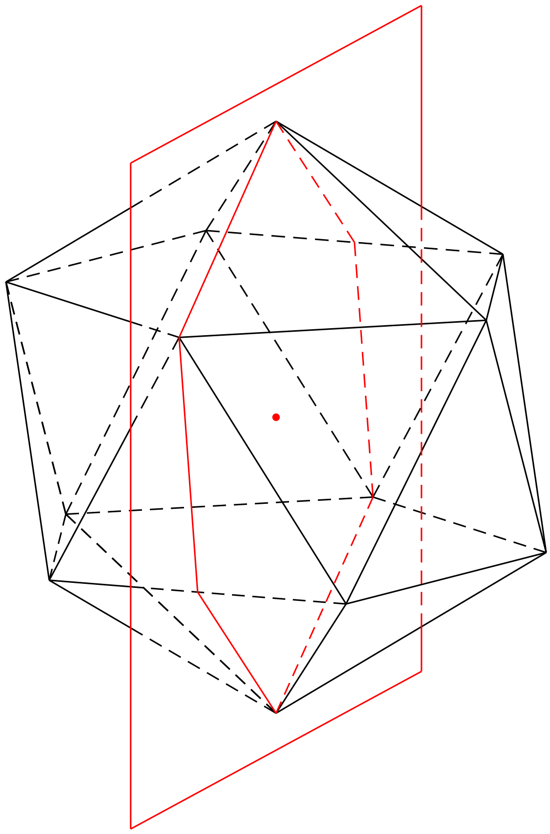
Drehsymmetrie: Ein Ikosaeder besitzt

- 6 fünfzählige Drehachsen (jeweils durch zwei gegenüber liegende Ecken),
- 10 dreizählige Drehachsen (jeweils durch die Mittelpunkte zweier gegenüber liegender Flächen) und
- 15 zweizählige Drehachsen (jeweils durch die Mittelpunkte zweier gegenüber liegender Kanten).

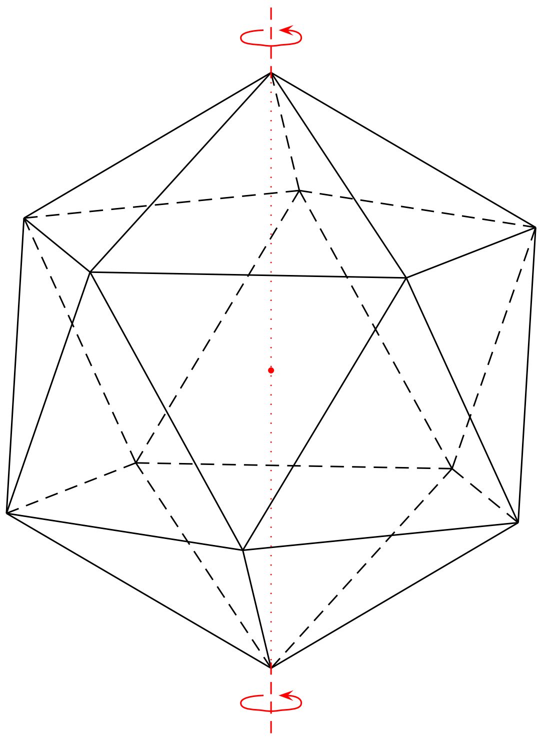
Punktsymmetrie: Ein Ikosaeder ist punktsymmetrisch.

Bemerkung: Es gibt insgesamt 120 (gleichsinnige oder ungleichsinnige) Kongruenzabbildungen (Isometrien), die das Ikosaeder auf sich abbilden. Sie bilden bezüglich der Hintereinanderausführung $\circ$ eine Gruppe. Diese Gruppe, die als **Ikosaedergruppe** (seltener als **Dodekaedergruppe**) bezeichnet wird, ist isomorph zum direkten Produkt $A_5 \times Z_2$ der alternierenden Gruppe A_5 und der zyklischen Gruppe Z_2.

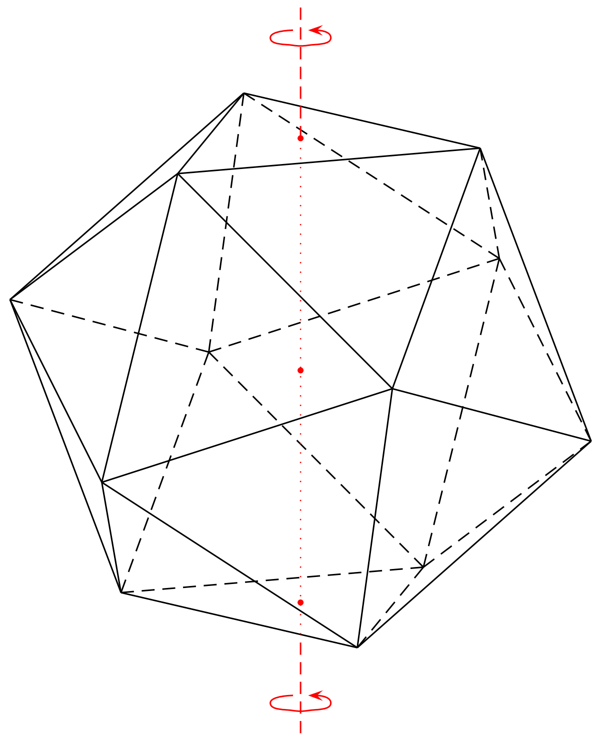
Beschränkt man sich auf die 60 gleichsinnigen unter den genannten 120 Kongruenzabbildungen, so erhält man eine Untergruppe, die zu A_5 isomorph ist. (Die Bezeichnungen sind allerdings nicht einheitlich; manchmal wird diese Untergruppe Ikosaedergruppe bzw. Dodekaedergruppe genannt.)



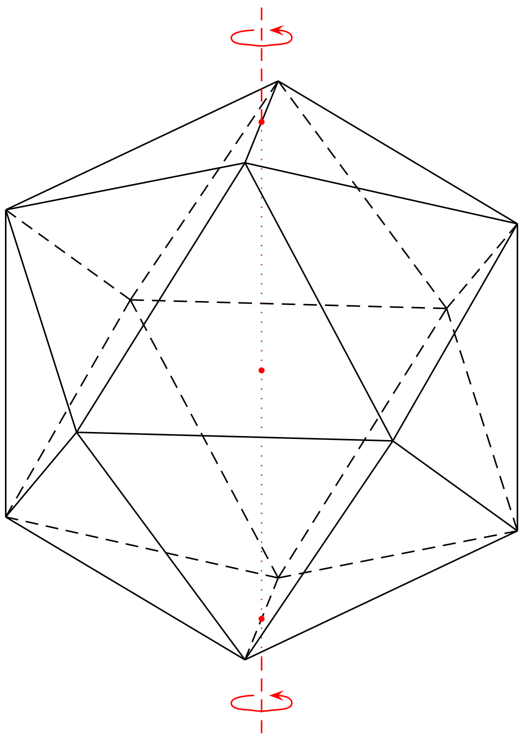
Ikosaeder mit Symmetrieebene



Ikosaeder mit fünfzähliger Drehachse
(durch zwei gegenüber liegende Ecken)



Ikosaeder mit dreizähliger Drehachse
(durch die Mittelpunkte zweier gegenüber liegender Flächen)

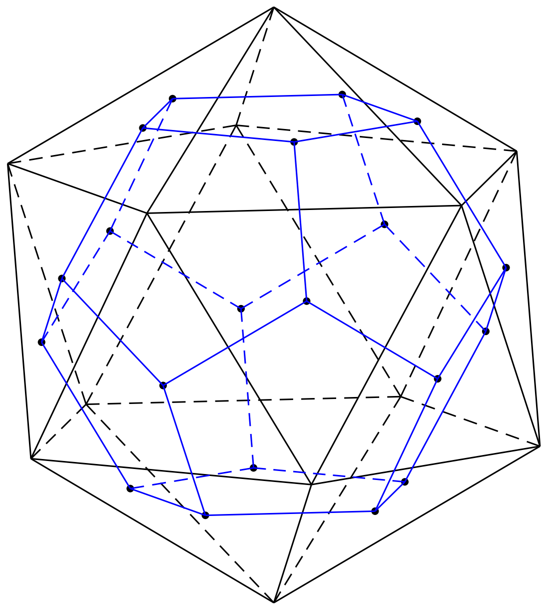


Ikosaeder mit zweizähliger Drehachse
(durch die Mittelpunkte zweier gegenüber liegender Kanten)

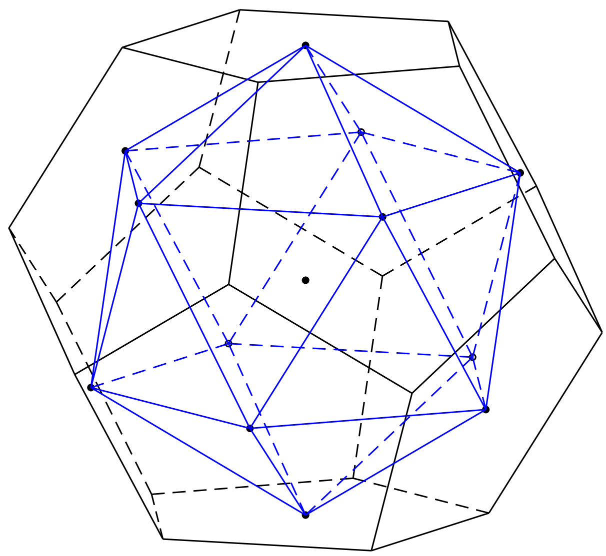
5 Dualitätseigenschaft

Satz 5

Verbindet man die Mittelpunkte der Begrenzungsflächen eines Ikosaeders, so entsteht dadurch ein Dodekaeder. Umgekehrt erhält man durch Verbinden der Flächenmittelpunkte eines Dodekaeders ein Ikosaeder.



Ikosaeder mit zugehörigem Dodekaeder



Dodekaeder mit zugehörigem Ikosaeder

Bemerkung: Aus der Dualität zwischen Ikosaeder und Dodekaeder folgt unmittelbar, dass beide Körper die gleichen Symmetrieeigenschaften haben.

6 Berechnungen

Satz 6

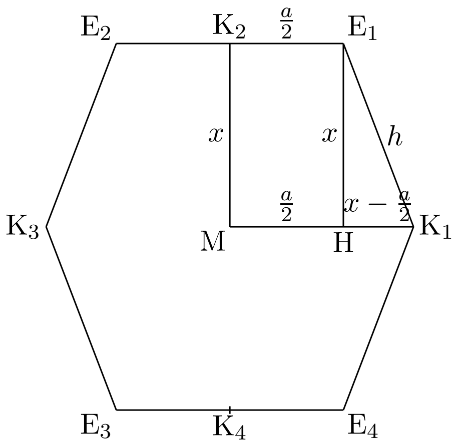
Die Entfernung eines Kantenmittelpunkts vom Mittelpunkt des Ikosaeders ist gegeben durch:

Entfernung Kantenmittelpunkt - Ikosaedermittelpunkt

$$\boxed{x = \frac{a}{4}(1 + \sqrt{5})}$$

Dabei bedeutet a die Länge einer Ikosaederkante.

Beweis:



Jede Symmetrieebene des Ikosaeders enthält vier Ecken (E_1, E_2, E_3, E_4) und vier Kantenmittelpunkte (K_1, K_2, K_3, K_4). Bezeichnet man die Entfernung der Punkte E_1 und K_1 mit h und die gesuchte Entfernung zwischen dem Ikosaedermittelpunkt M und einem beliebigen Kantenmittelpunkt K_i mit x, so gilt nach dem Satz des Pythagoras (angewandt auf das Dreieck E_1HK_1)

$$x^2 + (x - \frac{a}{2})^2 = h^2.$$

h ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a. Einsetzen des Ergebnisses von Satz 1 ergibt somit:

$$
\begin{aligned}
x^2 + (x - \frac{a}{2})^2 &= \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 \\
x^2 + \left[x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] &= \frac{3}{4}a^2 \\
2x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 &= \frac{3}{4}a^2 \\
2x^2 - ax - \frac{1}{2}a^2 &= 0
\end{aligned}
$$

Nun kann die Lösungsformel für quadratische Gleichungen verwendet werden:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-a) \pm \sqrt{(-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}a^2\right)}}{2 \cdot 2} \\
&= \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{4} \\
&= \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{4} \\
&= \frac{a \pm a\sqrt{5}}{4}
\end{aligned}
$$

Wäre das Minuszeichen von $\pm$ richtig, so würde sich – sinnloserweise – ein negativer Wert für x ergeben. Damit bestätigt sich die Behauptung:

$$
x = \frac{a + a\sqrt{5}}{4} = \frac{a}{4}(1 + \sqrt{5})
$$

Satz 7

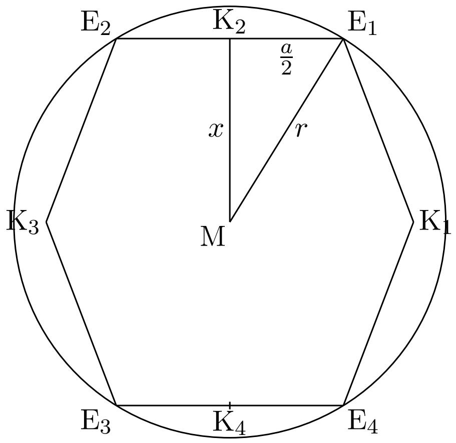
Der Umkugelradius eines Ikosaeders ergibt sich aus:

Umkugelradius

$$\boxed{r = \frac{a}{4}\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}}$$

a bezeichnet wieder die Länge einer Ikosaederkante.

Beweis:



Aus dem Satz des Pythagoras (angewandt auf das Dreieck E_1K_2M) folgt unter Verwendung von Satz 6:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \left[\frac{a}{4}(1+\sqrt{5})\right]^2 + \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{a^2}{16}\left[1^2 + 2\cdot 1\cdot\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2\right] + \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{a^2}{16}(6+2\sqrt{5}) + \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{a^2}{16}(10+2\sqrt{5}) \\ &= \frac{a^2}{16}\cdot 2(5+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen erhält man wie behauptet

$$r = \frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}.$$

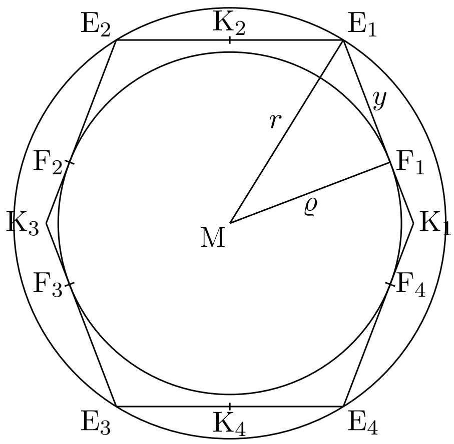
Satz 8

Für den Inkugelradius eines Ikosaeders mit Kantenlänge a gilt:

Inkugelradius

$$\boxed{\varrho = \frac{a}{12}\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}$$

Beweis:



Eine beliebige Symmetrieebene des Ikosaeders enthält – neben vier Ecken und vier Kantenmittelpunkten – die Mittelpunkte von vier Flächen. Aus Symmetriegründen berührt die Inkugel des Ikosaeders jede Fläche (von der Form eines gleichseitigen Dreiecks) in ihrem Mittelpunkt. Die in der Zeichnung dargestellten Berührpunkte sind mit F_1, F_2, F_3 und F_4 bezeichnet.

Ein weiteres Mal kann man den Satz des Pythagoras anwenden, dieses Mal auf das Dreieck MF_1E_1. Die Länge der Hypotenuse ist gleich dem Umkugelradius r, die Längen der Katheten stimmen mit dem gesuchten Inkugelradius ϱ beziehungsweise mit dem Umkreisradius y einer (dreieckigen) Ikosaederfläche überein.

$$\begin{aligned} \varrho^2 + y^2 &= r^2 \\ \varrho^2 &= r^2 - y^2 \end{aligned}$$

Nun werden die früheren Ergebnisse für r (Satz 7) und y (Satz 1, dort Bezeichnung r) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\varrho^2 &= \left(\frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 \\
&= \frac{a^2}{16}(10+2\sqrt{5}) - \frac{a^2}{9}\cdot 3 \\
&= \frac{a^2}{144}(90+18\sqrt{5}-48) \\
&= \frac{a^2}{144}(42+18\sqrt{5})
\end{aligned}$$

Um den Inkugelradius zu erhalten, muss man die Wurzel ziehen.

$$\varrho = \frac{a}{12}\sqrt{42+18\sqrt{5}}$$

Die folgende, nicht gerade naheliegend erscheinende Überlegung ermöglicht eine weitere Vereinfachung:

$$\begin{aligned}
(3+\sqrt{5})^2 &= 3^2 + 2\cdot 3\cdot\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 \\
(3+\sqrt{5})^2 &= 14+6\sqrt{5} \\
3(3+\sqrt{5})^2 &= 42+18\sqrt{5} \\
\sqrt{3}(3+\sqrt{5}) &= \sqrt{42+18\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Damit erhält man sofort – wie behauptet –

$$\varrho = \frac{a}{12}\sqrt{3}(3+\sqrt{5}).$$

Satz 9

Der Oberflächeninhalt eines Ikosaeders mit Kantenlänge a lässt sich mit folgender Formel berechnen:

Inhalt der Oberfläche

$$\boxed{S = 5a^2\sqrt{3}}$$

Beweis: Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks wurde in Satz 1 angegeben mit

$$A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

Dieser Wert ist nur noch mit der Anzahl der Flächen (also mit 20) zu multiplizieren.

Satz 10

Für das Volumen eines Ikosaeders gilt:

Volumen

$$\boxed{V = \frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5})}$$

Dabei steht a wieder für die Länge einer Ikosaederkante.

Beweis: Verbindet man die Ecken einer Seitenfläche mit dem Mittelpunkt des Ikosaeders, so erhält man eine Dreieckspyramide. Für das Volumen einer Pyramide gilt allgemein die Formel

$$V_P = \frac{1}{3}Ah,$$

wobei A für die Grundfläche der Pyramide steht und h für die Pyramidenhöhe. Diese Höhe stimmt aber mit dem Inkugelradius des Ikosaeders (ϱ) überein. Das gegebene Ikosaeder lässt sich zerlegen in 20 Pyramiden des genannten Typs. Wegen $S = 20A$ und $h = \varrho$ erhält man für das Ikosaedervolumen:

$$\begin{aligned} V &= 20 \cdot \frac{1}{3}Ah \\ &= \frac{1}{3}S\varrho \end{aligned}$$

Hier können die Ergebnisse von Satz 9 und Satz 8 eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot 5a^2\sqrt{3} \cdot \frac{a}{12}\sqrt{3}(3+\sqrt{5}) \\ &= \frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

Literatur

[1] Friedrich Barth, Gert Krumbacher, Elisabeth Matschiner, Konrad Ossiander: Anschauliche Geometrie 3.
Ehrenwirth Verlag, München, 1988.

[2] Pierre Basieux: Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze.
Rowohlt Taschenbuch Verlag, Hamburg, 2000.

[3] Walter Fendt: Die platonischen Körper (Java-Applet).
Version Java 1.4: `www.walter-fendt.de/m14d/platon.htm`
Version Java 1.1: `www.walter-fendt.de/m11d/platon.htm`

[4] Udo Hebisch: Mathematisches Café; Ikosaeder.
`www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/ikosa.html`

[5] Jürgen Köller: Mathematische Basteleien; Ikosaeder.
`www.mathematische-basteleien.de/ikosaeder.htm`

[6] Eric W. Weisstein: Math World, Icosahedral Group.
`mathworld.wolfram.com/IcosahedralGroup.html`

Letzte Änderung: 8. März 2005