

Das Dodekaeder

Walter Fendt

22. Februar 2005

1 Grundlagen: Das regelmäßige Fünfeck

Satz 1

Für ein regelmäßiges Fünfeck mit Seitenlänge a gelten folgende Formeln:

Höhe

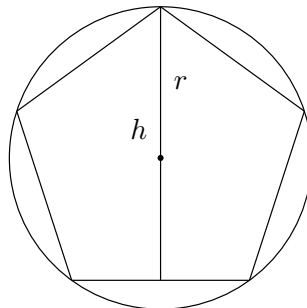
$$h = \frac{a}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

Umkreisradius

$$r = \frac{a}{10} \sqrt{10(5 + \sqrt{5})}$$

Flächeninhalt

$$A = \frac{a^2}{4} \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$$



Regelmäßiges Fünfeck mit Höhe und Umkreis

2 Grundlagen: Die eulersche Polyederformel

Satz 2

Für die Anzahlen der Ecken (e), der Flächen (f) und der Kanten (k) eines beliebigen konvexen Polyeders gilt folgende Beziehung:

Eulersche Polyederformel

$$e + f = k + 2$$

Bemerkung: Der Begriff *Polyeder* (Vielflächner) bezeichnet einen Körper, der von Vielecken (Polygonen) begrenzt wird. *Konvex* bedeutet, dass eine beliebige Verbindungsstrecke von zwei Punkten des Polyeders stets vollständig innerhalb des Polyeders liegen muss. Alle Ecken müssen also nach außen gerichtet sein.

3 Definition und einfache Eigenschaften

Definition 1

Ein **Dodekaeder** (von griechisch *dodekáedron* für Zwölf-flächner) ist ein konvexes Polyeder, das von kongruenten regelmäßigen Fünfecken begrenzt wird, wobei in jeder Ecke drei Flächen zusammentreffen.

Bemerkung 1: Grundsätzlich wäre es denkbar, dass ein Körper mit den geforderten Eigenschaften gar nicht existiert. Auf den Nachweis der Existenz wird hier jedoch verzichtet.

Bemerkung 2: Zwei verschiedene Dodekaeder sind in jedem Fall zueinander ähnlich. Daher spricht man häufig von *dem* Dodekaeder, als ob es nur ein einziges gäbe.

Bemerkung 3: Das Dodekaeder gehört – zusammen mit dem regelmäßigen Tetraeder, dem Hexaeder (Würfel), dem Oktaeder und dem Ikosaeder – zu den fünf **platonischen Körpern**.

Satz 3

Jedes Dodekaeder besitzt 20 Ecken, 30 Kanten und 12 Flächen.

Beweis (nach [2]): Ist e die Anzahl der Ecken, so lässt sich auch die Zahl der Flächen (f) durch e ausdrücken. Würde man einfach die Eckenzahl mit der Zahl der Flächen pro Ecke multiplizieren ($e \cdot 3$), so würde man jede Fläche fünffach zählen, nämlich je einmal für jede ihrer Ecken. Daher muss man noch durch 5 dividieren. Für die Zahl der Flächen ergibt sich folglich $f = \frac{3}{5}e$.

Eine entsprechende Überlegung ist für die Zahl der Kanten (k) möglich. Da eine Kante zwei Ecken enthält und in jeder Ecke drei Kanten zusammentreffen, muss $k = \frac{3}{2}e$ gelten.

Setzt man die gefundenen Rechenausdrücke in die eulersche Polyederformel $e + f = k + 2$ (siehe Satz 2) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}e + \frac{3}{5}e &= \frac{3}{2}e + 2 \\ \frac{1}{10}e &= 2 \\ e &= 20\end{aligned}$$

Aus diesem Ergebnis folgt nun sofort:

$$\begin{aligned}f &= \frac{3}{5}e = \frac{3}{5} \cdot 20 = 12 \\ k &= \frac{3}{2}e = \frac{3}{2} \cdot 20 = 30\end{aligned}$$

4 Symmetrieeigenschaften

Satz 4

Ebenensymmetrie: Ein Dodekaeder hat 15 Symmetrieebenen. Jede Symmetrieebene enthält zwei gegenüber liegende Kanten und die Symmetrieachsen von vier Fünfecksflächen. Auf einer Symmetrieebene liegen daher stets vier Ecken, vier Kantenmittelpunkte und vier Flächenmittelpunkte.

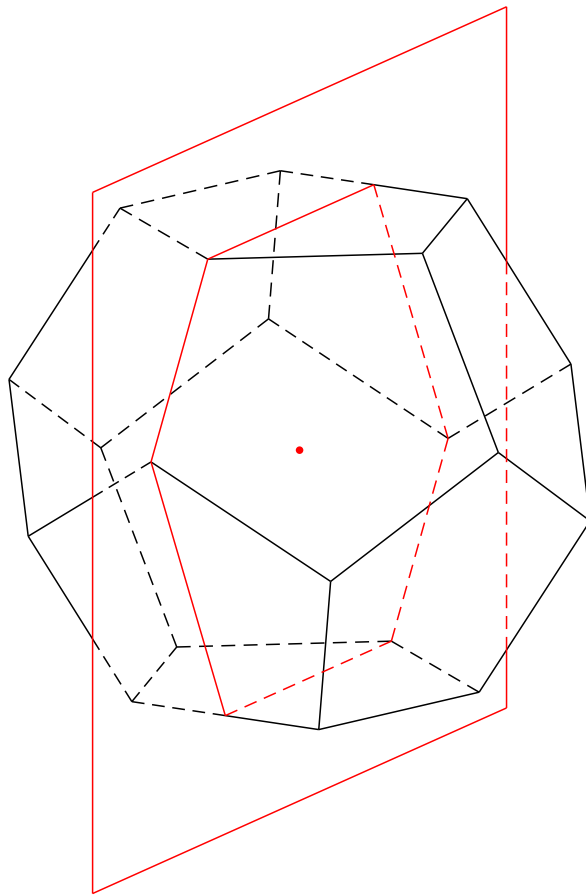
Drehsymmetrie: Ein Dodekaeder besitzt

- 6 fünfzählige Drehachsen (jeweils durch die Mittelpunkte zweier gegenüber liegender Flächen),
- 10 dreizählige Drehachsen (jeweils durch zwei gegenüber liegende Ecken) und
- 15 zweizählige Drehachsen (jeweils durch die Mittelpunkte zweier gegenüber liegender Kanten).

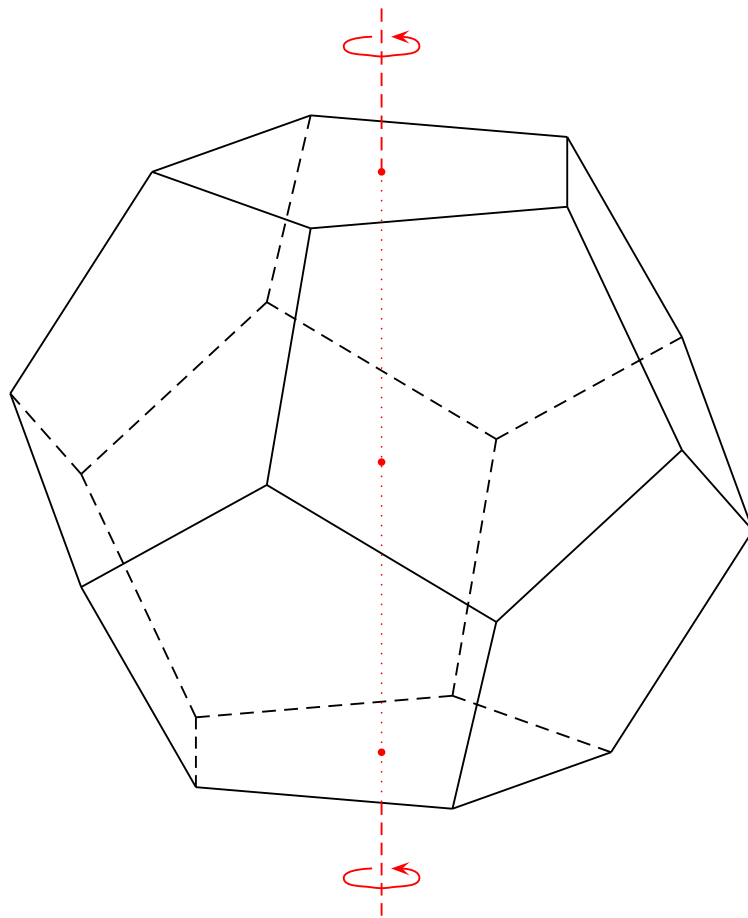
Punktsymmetrie: Ein Dodekaeder ist punktsymmetrisch.

Bemerkung: Es gibt insgesamt 120 (gleichsinnige oder ungleichsinnige) Kongruenzabbildungen (Isometrien), die das Dodekaeder auf sich abbilden. Sie bilden bezüglich der Hintereinanderausführung \circ eine Gruppe. Diese Gruppe, die als **Dodekaedergruppe** oder häufiger als **Ikosaedergruppe** bezeichnet wird, ist isomorph zum direkten Produkt $A_5 \times Z_2$ der alternierenden Gruppe A_5 und der zyklischen Gruppe Z_2 .

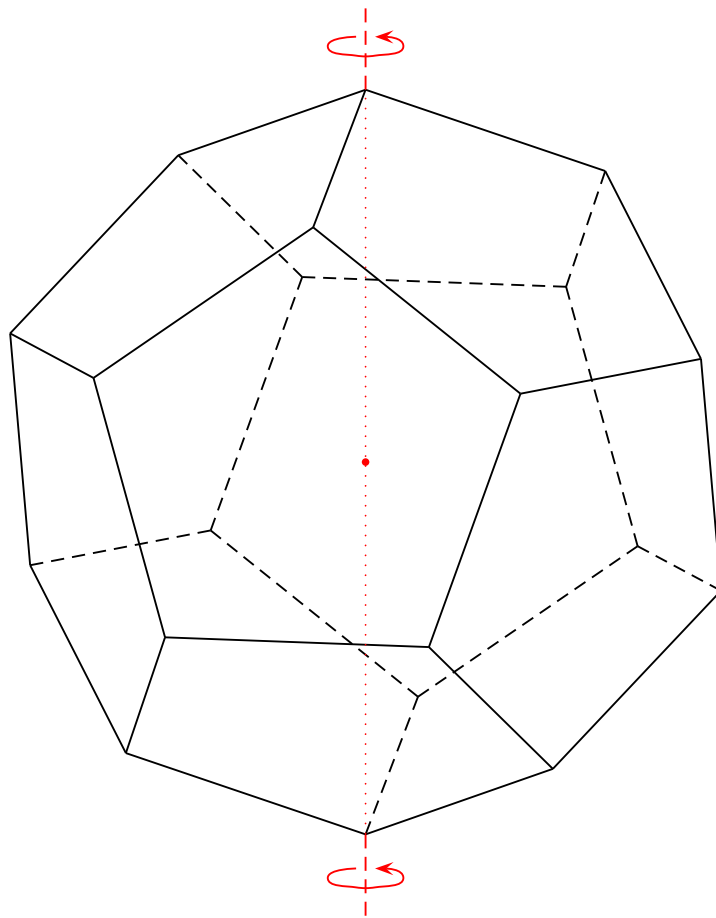
Beschränkt man sich auf die 60 gleichsinnigen unter den genannten 120 Kongruenzabbildungen, so erhält man eine Untergruppe, die zu A_5 isomorph ist. (Die Bezeichnungen sind allerdings nicht einheitlich; manchmal wird diese Untergruppe Ikosaedergruppe bzw. Dodekaedergruppe genannt.)



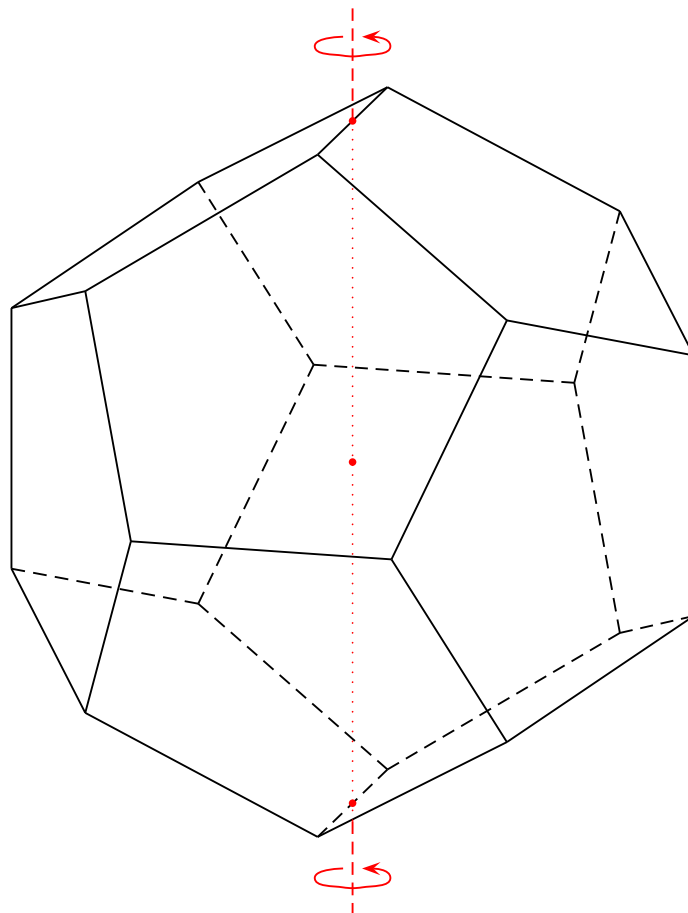
Dodekaeder mit Symmetrieebene



Dodekaeder mit fünfzähliger Drehachse
(durch die Mittelpunkte zweier gegenüber liegender Flächen)



Dodekaeder mit dreizähliger Drehachse
(durch zwei gegenüber liegende Ecken)

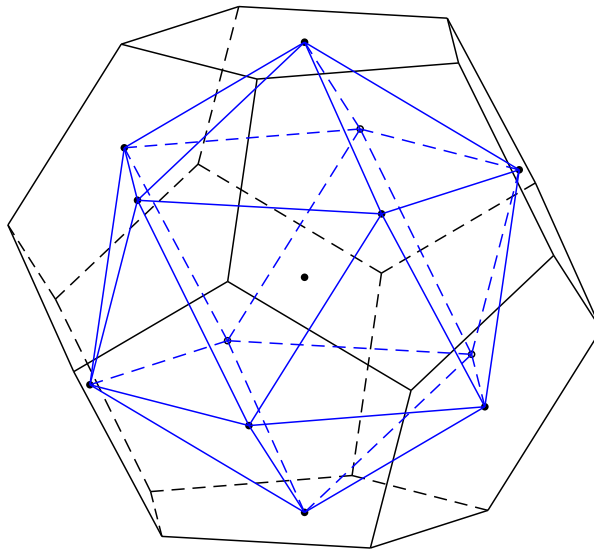


Dodekaeder mit zweizähliger Drehachse
(durch die Mittelpunkte zweier gegenüber liegender Kanten)

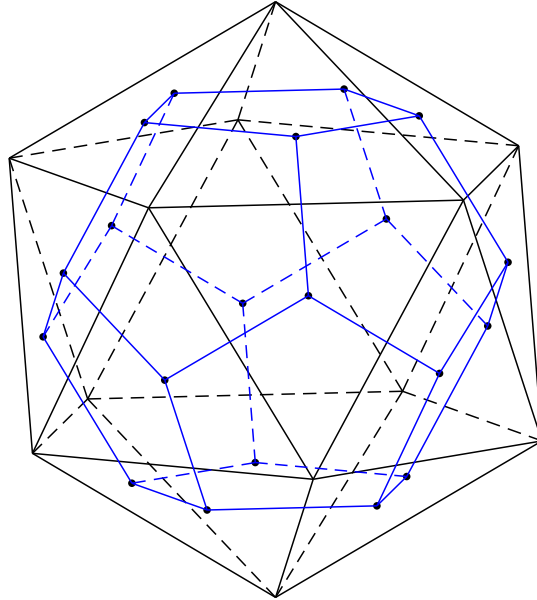
5 Dualitätseigenschaft

Satz 5

Verbindet man die Mittelpunkte der Begrenzungsflächen eines Dodekaeders, so entsteht dadurch ein Ikosaeder. Umgekehrt erhält man durch Verbinden der Flächenmittelpunkte eines Ikosaeders ein Dodekaeder.



Dodekaeder mit zugehörigem Ikosaeder



Ikosaeder mit zugehörigem Dodekaeder

Bemerkung: Aus der Dualität zwischen Dodekaeder und Ikosaeder folgt unmittelbar, dass beide Körper die gleichen Symmetrieeigenschaften haben.

6 Berechnungen

Satz 6

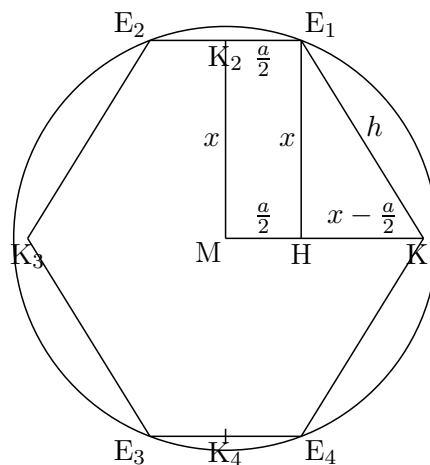
Die Entfernung eines Kantenmittelpunkts vom Mittelpunkt des Dodekaeders ist gegeben durch:

Entfernung Kantenmittelpunkt - Dodekaedermittelpunkt

$$x = \frac{a}{4}(3 + \sqrt{5})$$

Dabei bedeutet a die Länge einer Dodekaederkante.

Beweis:



Jede Symmetrieebene des Dodekaeders enthält vier Ecken (E_1, E_2, E_3, E_4) und vier Kantenmittelpunkte (K_1, K_2, K_3, K_4). Bezeichnet man die Entfernung der Punkte E_1 und K_1 mit h und die gesuchte Entfernung zwischen dem Dodekaedermittelpunkt M und einem beliebigen Kantenmittelpunkt K_i mit x , so gilt nach dem Satz des Pythagoras (angewandt auf das Dreieck E_1HK_1)

$$x^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = h^2.$$

h ist die Höhe eines regelmäßigen Fünfecks mit Seitenlänge a . Einsetzen des Ergebnisses von Satz 1 ergibt somit:

$$\begin{aligned}
x^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 &= \left(\frac{a}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\right)^2 \\
x^2 + \left[x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] &= \frac{a^2}{4}(5 + 2\sqrt{5}) \\
2x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 &= \frac{5}{4}a^2 + \frac{a^2}{2}\sqrt{5} \\
2x^2 - ax - a^2 - \frac{a^2}{2}\sqrt{5} &= 0 \\
2x^2 - ax - a^2\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Nun kann die Lösungsformel für quadratische Gleichungen verwendet werden:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(-a) \pm \sqrt{(-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \left(-a^2\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\right)}}{2 \cdot 2} \\
&= \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)}}{4} \\
&= \frac{a \pm \sqrt{a^2(9 + 4\sqrt{5})}}{4} \\
&= \frac{a \pm a\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}{4}
\end{aligned}$$

An dieser Stelle kommt man mit einem kleinen Trick weiter. Aus der binomischen Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(2 + \sqrt{5})^2 &= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5} \\
2 + \sqrt{5} &= \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich der oben gefundene Rechenausdruck zu

$$x = \frac{a \pm a(2 + \sqrt{5})}{4}.$$

Wäre das Minuszeichen von \pm richtig, so würde sich – sinnloserweise – ein negativer Wert für x ergeben. Damit bestätigt sich die Behauptung:

$$x = \frac{a + a(2 + \sqrt{5})}{4} = \frac{3a + a\sqrt{5}}{4} = \frac{a}{4}(3 + \sqrt{5})$$

Satz 7

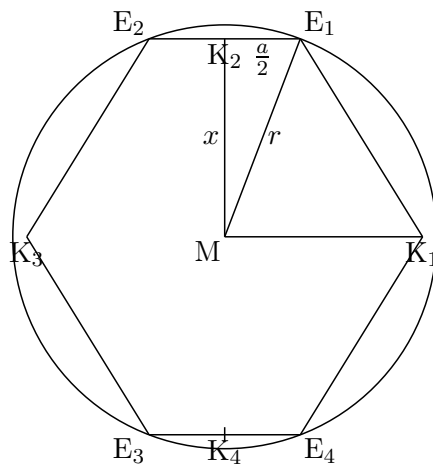
Der Umkugelradius eines Dodekaeders ergibt sich aus:

Umkugelradius

$$r = \frac{a}{4} \sqrt{6(3 + \sqrt{5})}$$

a bezeichnet wieder die Länge einer Dodekaederkante.

Beweis:



Aus dem Satz des Pythagoras (angewandt auf das Dreieck E_1K_2M) folgt unter Verwendung von Satz 6:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \left[\frac{a}{4}(3 + \sqrt{5})\right]^2 + \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{a^2}{16} \left[3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2\right] + \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{a^2}{16} (14 + 6\sqrt{5}) + \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{a^2}{16} (18 + 6\sqrt{5}) \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{16} \cdot 6(3 + \sqrt{5})$$

Durch Wurzelziehen erhält man wie behauptet

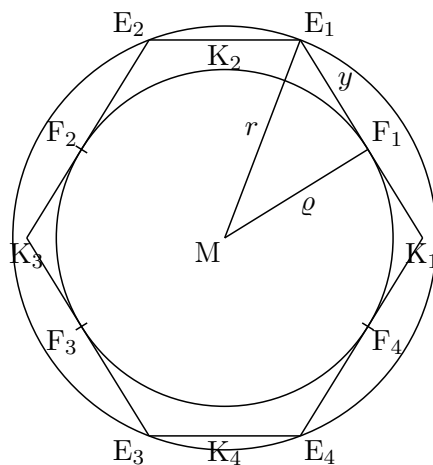
$$r = \frac{a}{4} \sqrt{6(3 + \sqrt{5})}.$$

Satz 8

Für den Inkugelradius eines Dodekaeders mit Kantenlänge a gilt:

Inkugelradius
$\varrho = \frac{a}{20} \sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}$

Beweis: Eine beliebige Symmetrieebene des Dodekaeders enthält – neben vier Ecken und vier Kantenmittelpunkten – die Mittelpunkte von vier Flächen (von der Form eines regelmäßigen Fünfecks) in ihrem Mittelpunkt. Die in der Zeichnung dargestellten Berührungspunkte sind mit F_1, F_2, F_3 und F_4 bezeichnet.



Ein weiteres Mal kann man den Satz des Pythagoras anwenden, dieses Mal auf das Dreieck MF_1E_1 . Die Länge der Hypotenuse ist gleich dem Umkugelradius r , die Längen der Katheten stimmen mit dem gesuchten Inkugelradius

ϱ beziehungsweise mit dem Umkreisradius y einer (fünfeckigen) Dodekaederfläche überein.

$$\begin{aligned}\varrho^2 + y^2 &= r^2 \\ \varrho^2 &= r^2 - y^2\end{aligned}$$

Nun werden die früheren Ergebnisse für r (Satz 7) und y (Satz 1, dort Bezeichnung r) eingesetzt.

$$\begin{aligned}\varrho^2 &= \left(\frac{a}{4}\sqrt{6(3+\sqrt{5})}\right)^2 - \left(\frac{a}{10}\sqrt{10(5+\sqrt{5})}\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{16}(18+6\sqrt{5}) - \frac{a^2}{100}(50+10\sqrt{5}) \\ &= \frac{a^2}{400}(450+150\sqrt{5}-200-40\sqrt{5}) \\ &= \frac{a^2}{400}(250+110\sqrt{5})\end{aligned}$$

Um den Inkugelradius zu erhalten, muss man nur noch die Wurzel ziehen.

$$\varrho = \frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}} = \frac{a}{20}\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}$$

Satz 9

Der Oberflächeninhalt eines Dodekaeders mit Kantenlänge a lässt sich mit folgender Formel berechnen:

Inhalt der Oberfläche

$$S = 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$$

Beweis: Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Fünfecks wurde in Satz 1 angegeben mit

$$A = \frac{a^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}.$$

Dieser Wert ist nur noch mit der Anzahl der Flächen (also mit 12) zu multiplizieren.

Satz 10

Für das Volumen eines Dodekaeders gilt:

<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> Volumen </td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> $V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$ </td> </tr> </table>	Volumen	$V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$
Volumen		
$V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$		

Dabei steht a wieder für die Länge einer Dodekaederkante.

Beweis: Verbindet man die Ecken einer Seitenfläche mit dem Mittelpunkt des Dodekaeders, so erhält man eine Fünfeckspyramide. Für das Volumen einer Pyramide gilt allgemein die Formel

$$V_P = \frac{1}{3}Ah,$$

wobei A für die Grundfläche der Pyramide steht und h für die Pyramidenhöhe. Diese Höhe stimmt aber mit dem Inkugelradius des Dodekaeders (ϱ) überein. Das gegebene Dodekaeder lässt sich zerlegen in 12 Pyramiden des genannten Typs. Wegen $S = 12A$ und $h = \varrho$ erhält man für das Dodekaedervolumen:

$$\begin{aligned} V &= 12 \cdot \frac{1}{3}Ah \\ &= \frac{1}{3}S\varrho \end{aligned}$$

Hier können die Ergebnisse von Satz 9 und Satz 8 eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} \cdot \frac{a}{20}\sqrt{10(25+11\sqrt{5})} \\ &= \frac{a^3}{20}\sqrt{50(5+2\sqrt{5})(25+11\sqrt{5})} \\ &= \frac{a^3}{20} \cdot 5\sqrt{2(125+55\sqrt{5}+50\sqrt{5}+22 \cdot 5)} \\ &= \frac{a^3}{4}\sqrt{2(235+105\sqrt{5})} \\ &= \frac{a^3}{4}\sqrt{470+210\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Nun benötigt man wieder einen kleinen Trick. Anwendung der binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ liefert mit

$$\begin{aligned}
(15 + 7\sqrt{5})^2 &= 15^2 + 2 \cdot 15 \cdot 7\sqrt{5} + (7\sqrt{5})^2 \\
&= 225 + 210\sqrt{5} + 245 \\
&= 470 + 210\sqrt{5} \\
15 + 7\sqrt{5} &= \sqrt{470 + 210\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

„zufällig“ eine passende Vereinfachungsmöglichkeit.

$$V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$$

Literatur

- [1] Friedrich Barth, Gert Krumbacher, Elisabeth Matschiner, Konrad Os-
sianer: Anschauliche Geometrie 3.
Ehrendwirth Verlag, München, 1988.
- [2] Pierre Basieux: Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze.
Rowohlt Taschenbuch Verlag, Hamburg, 2000.
- [3] Walter Fendt: Die platonischen Körper (Java-Applet).
Version Java 1.4: www.walter-fendt.de/m14d/platon.htm
Version Java 1.1: www.walter-fendt.de/m11d/platon.htm
- [4] Udo Hebisch: Mathematisches Café; Pentagon.
www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/pentagon.html
- [5] Udo Hebisch: Mathematisches Café; Dodekaeder.
www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/dodeka.html
- [6] Jürgen Köller: Mathematische Basteleien; Pentagondodekaeder.
www.mathematische-basteleien.de/pentagondodekaeder.htm
- [7] Eric W. Weisstein: Math World, Icosahedral Group.
mathworld.wolfram.com/IcosahedralGroup.html

Letzte Änderung: 9. März 2005