Das Apollonios-Problem CPP

Walter Fendt

28. Februar 2022

Das **Problem des Apollonios** (Apollonios von Perge, geboren etwa 265 v. Chr., gestorben etwa 190 v. Chr.) gehört sicher zu den berühmtesten und auch kompliziertesten geometrischen Problemen, mit denen sich die antiken Mathematiker auseinandersetzten. Es geht darum, zu drei gegebenen geometrischen Objekten (Punkte, Geraden und/oder Kreise) diejenigen Kreise zu finden, die durch die gegebenen Punkte gehen und die gegebenen Geraden bzw. Kreise berühren.

Die verschiedenen Fälle des Problems werden – entsprechend den gegebenen Objekten – oft durch Kombinationen der Buchstaben C (engl. *circle*, für Kreise), L (engl. *line*, für Geraden) und P (engl. *point*, für Punkte) abgekürzt. Im Einzelnen gibt es zehn Teilprobleme, nämlich CCC, CCL, CCP, CLL, CLP, CPP, LLL, LLP, LPP, PPP. Im Schulunterricht werden meist nur zwei besonders einfache Probleme behandelt: Das PPP-Problem wird durch den Umkreis eines Dreiecks gelöst, das LLL-Problem durch den Inkreis und die drei Ankreise.

Was die Überlegungen des Apollonios betrifft, so kann man heute nur darüber spekulieren; die originale Arbeit (*Über Berührungen*) ist nicht erhalten. Erst in der Neuzeit gelang es Mathematikern wie Adriaan van Roomen und François Viète, auch die komplizierteren Teilprobleme (erneut) zu lösen.

Als Beispiel befasse ich mich hier mit dem CPP-Problem. Zu einem Kreis und zwei Punkten sollen Kreise konstruiert werden, die den gegebenen Kreis berühren und durch die gegebenen Punkte gehen. Erstaunlich viele Aspekte spielen bei diesem zunächst einfach erscheinenden Problem eine Rolle. Nach der Besprechung einiger grundlegender Sätze (Abschnitt 1) wird die Konstruktion erläutert (Abschnitt 2) und durchgeführt (Abschnitt 3). Dabei profitieren wir heute, verglichen mit Apollonios, von der Möglichkeit, mithilfe des Computers sehr präzise Zeichnungen zu erstellen. Nach der Besprechung diverser Sonderfälle (Abschnitt 4) gehe ich im Abschnitt 5 noch auf die algebraische Bestimmung der Lösungskreise ein.

Inhaltsverzeichnis

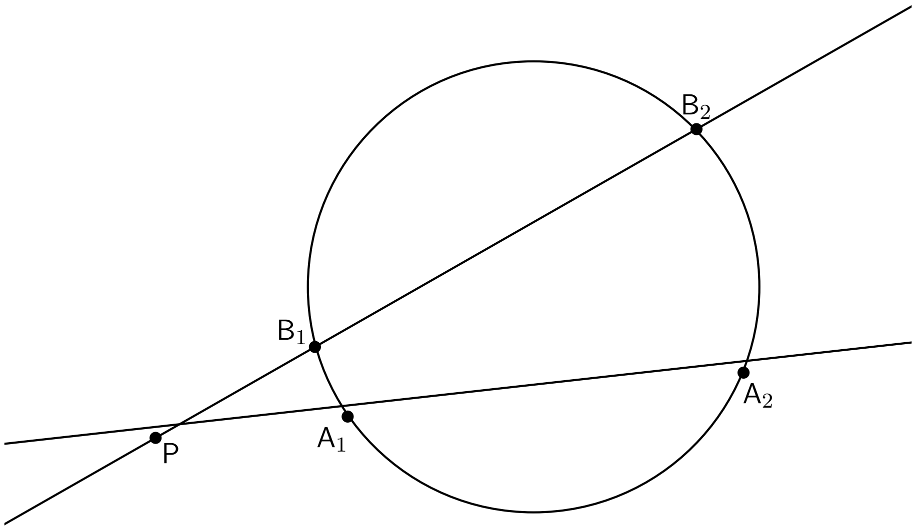
1 Grundlagen

Bei der Begründung der Konstruktion werden die folgenden Sätze benötigt:

Sekantensatz:

Gegeben seien ein Kreis, ein Punkt P außerhalb des Kreises und zwei Kreissekanten durch P. Die Schnittpunkte zwischen dem Kreis und einer Sekante seien mit A_1 und A_2 bezeichnet, die Schnittpunkte zwischen Kreis und zweiter Sekante mit B_1 und B_2. Unter diesen Voraussetzungen gilt:

$$\overline{\mathsf{PA}_1} \cdot \overline{\mathsf{PA}_2} \quad = \quad \overline{\mathsf{PB}_1} \cdot \overline{\mathsf{PB}_2}$$



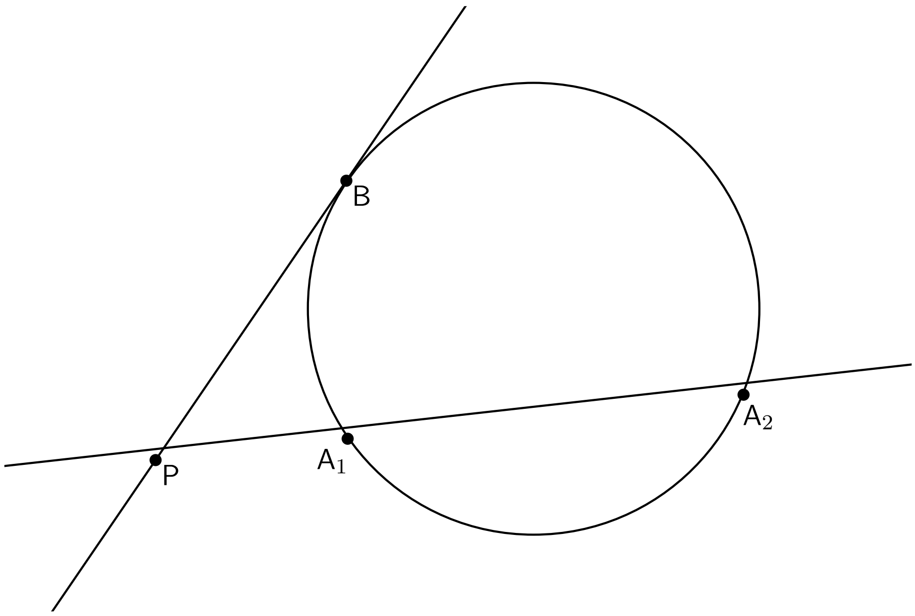
Umkehrung des Sekantensatzes:

Gegeben seien ein Punkt P und zwei verschiedene Halbgeraden mit Anfangspunkt P. Die Punkte A_1 und A_2 sollen auf der einen Halbgeraden liegen, die Punkte B_1 und B_2 auf der anderen. Alle genannten Punkte seien paarweise verschieden. Gilt $\overline{\mathsf{PA}_1} \cdot \overline{\mathsf{PA}_2} = \overline{\mathsf{PB}_1} \cdot \overline{\mathsf{PB}_2}$, so liegen die vier Punkte A_1, A_2, B_1 und B_2 auf einem Kreis.

Sekanten-Tangenten-Satz:

Gegeben seien ein Kreis, ein Punkt P außerhalb des Kreises, eine Kreissekante durch P und eine Kreistangente durch P. Die Schnittpunkte zwischen Sekante und Kreis seien mit A_1 und A_2 bezeichnet, der Berührpunkt zwischen Tangente und Kreis mit B. Unter diesen Voraussetzungen gilt:

$$\overline{\mathsf{PA}_1} \cdot \overline{\mathsf{PA}_2} \quad = \quad \overline{\mathsf{PB}}^2$$



Umkehrung des Sekanten-Tangenten-Satzes:

Gegeben seien ein Punkt P und zwei verschiedene Halbgeraden mit Anfangspunkt P. Die Punkte A_1 und A_2 sollen auf der einen Halbgeraden liegen, der Punkt B auf der anderen. Alle genannten Punkte seien paarweise verschieden. Gilt $\overline{\mathsf{PA}_1} \cdot \overline{\mathsf{PA}_2} = \overline{\mathsf{PB}}^2$, so berührt die Halbgerade durch B den Kreis, der durch die Punkte A_1, A_2 und B geht (Umkreis), und zwar im Punkt B.

2 Vorüberlegungen

Gegeben sind ein Kreis a (mit Mittelpunkt A) und zwei verschiedene Punkte B und C außerhalb des Kreises. Gesucht sind Kreise, die durch die Punkte B und C gehen und den Kreis a berühren (einschließend oder ausschließend).

Die folgende Argumentation stammt im Wesentlichen aus der Abhandlung „Das Apollonische Berührproblem" von Johannes Röttgen-Burtscheidt (siehe Abschnitt 6).

Es wird ein Hilfskreis verwendet, der durch B und C geht und den gegebenen Kreis a in zwei Punkten H_1 und H_2 schneidet. J sei der Schnittpunkt der Geraden BC und $\mathsf{H}_1\mathsf{H}_2$. Nach dem Sekantensatz (siehe Abschnitt 1) gilt $\overline{\mathsf{JH}_1} \cdot \overline{\mathsf{JH}_2} = \overline{\mathsf{JB}} \cdot \overline{\mathsf{JC}}$. Nun seien L_1 und L_2 die Berührpunkte der beiden Tangenten des Kreises a, die durch J gehen. Zur Konstruktion von L_1 und L_2 verwendet man sinnvollerweise den Thaleskreis über der Strecke $[\mathsf{AJ}]$.

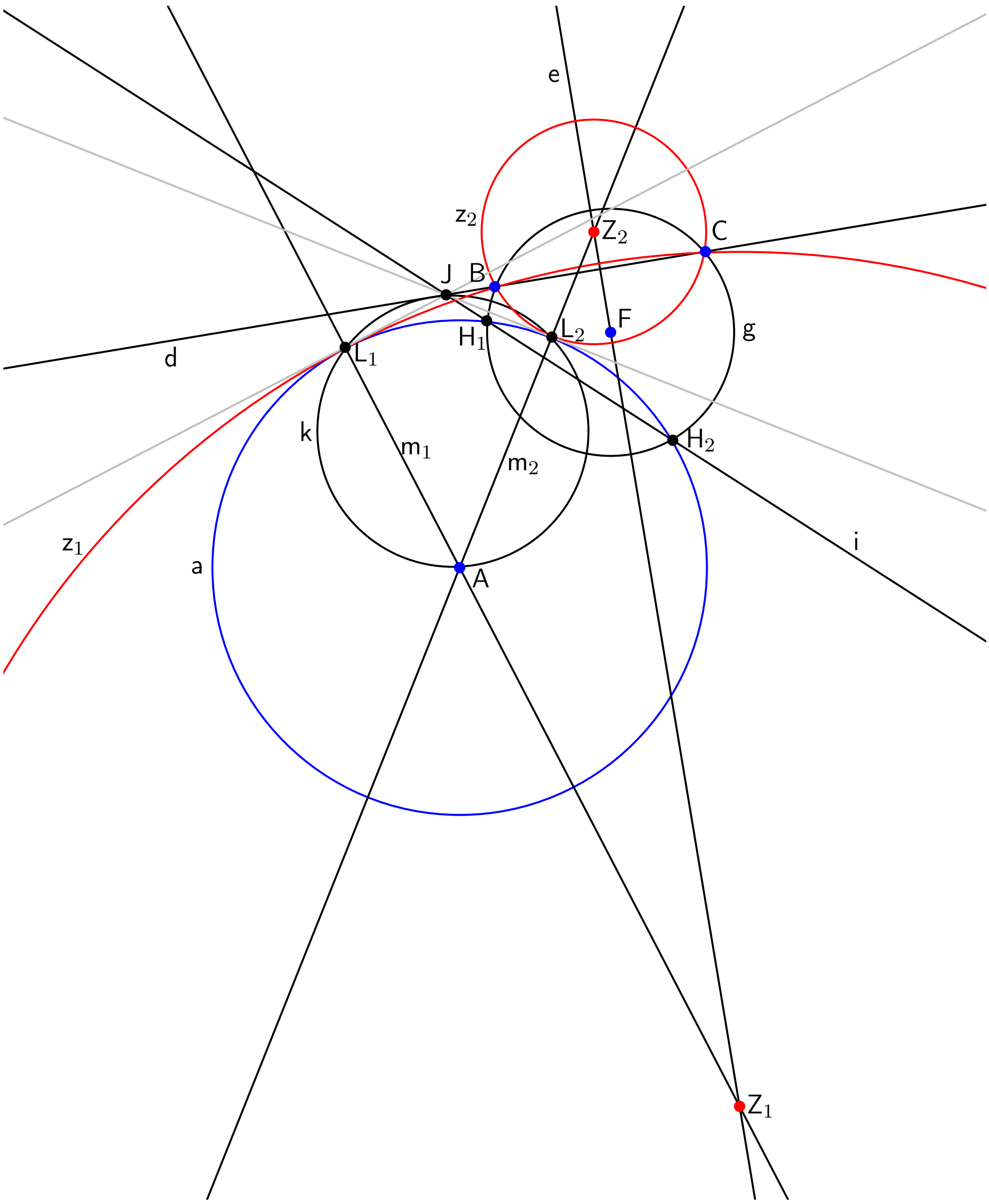
In Bezug auf L_1 folgt aus dem Sekanten-Tangenten-Satz (Abschnitt 1) $\overline{\mathsf{JH}_1} \cdot \overline{\mathsf{JH}_2} = \overline{\mathsf{JL}_1}^2$ und weiter $\overline{\mathsf{JB}} \cdot \overline{\mathsf{JC}} = \overline{\mathsf{JL}_1}^2$. Nach der Umkehrung des Sekanten-Tangenten-Satzes (ebenfalls Abschnitt 1) liegen also B, C und L_1 auf einem Kreis, der in L_1 die Tangente JL_1 und somit auch den gegebenen Kreis berührt. Damit ist die erste Lösung gefunden.

Entsprechend lässt sich mithilfe des Punktes L_2 die zweite Lösung konstruieren.

3 Konstruktion

In diesem Abschnitt werden nur die „Normalfälle“ behandelt: Es wird vorausgesetzt, dass die gegebenen Punkte verschieden sind und nicht auf dem gegebenen Kreis liegen. Die anderen Fälle findet man im Abschnitt 4 (Sonderfälle).

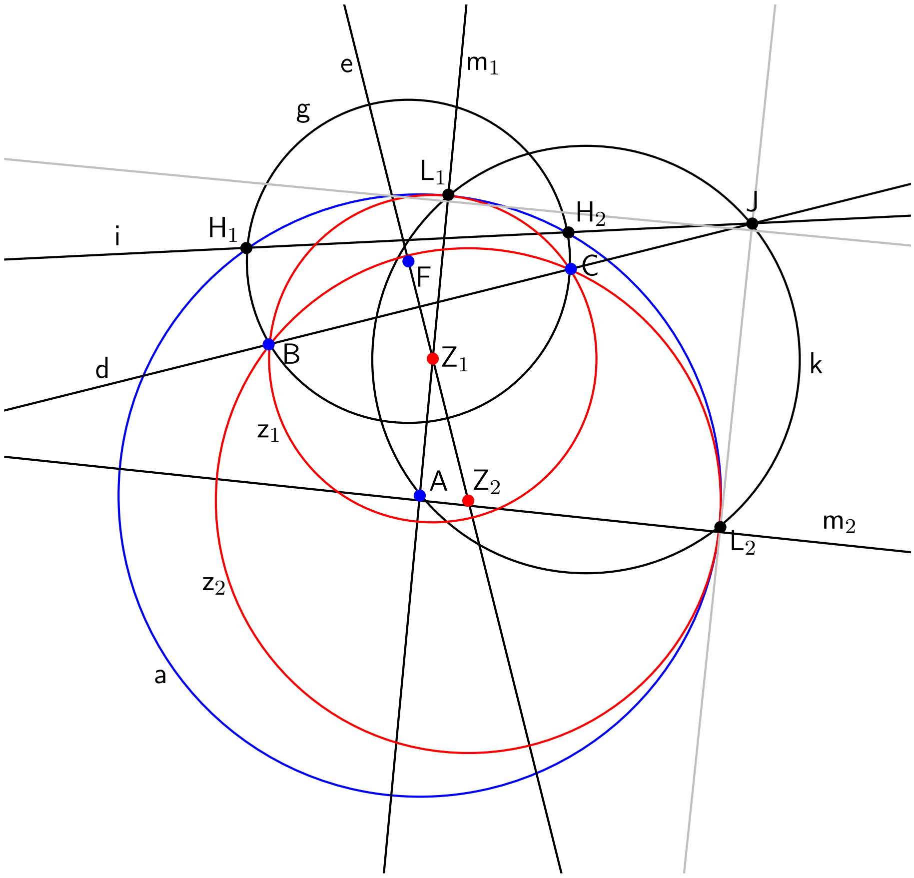
1. Fall: Beide Punkte außerhalb des Kreises



Ein Lösungskreis (z_1) berührt den gegebenen Kreis a einschließend, der andere (z_2) ausschließend. Dies gilt, wenn die Gerade BC wie hier eine Passante ist, also den gegebenen Kreis nicht schneidet. Ist BC eine Sekante des Kreises, sind entweder beide Berührungen einschließend (Kreis zwischen den Punkten) oder beide ausschließend (Punkte auf einer Seite des Kreises). Ist BC eine Tangente des Kreises, so existiert nur eine Lösung; dabei ist die Berührung einschließend, wenn der Kreis zwischen den Punkten liegt, und ausschließend, wenn die Punkte auf einer Seite des Kreises liegen.

Die grau gezeichneten Tangenten JL_1 und JL_2 sind für die Begründung wichtig, aber nicht für die Konstruktion.

2. Fall: Beide Punkte innerhalb des Kreises



Beide Lösungskreise (z_1 und z_2) werden vom gegebenen Kreis a einschließend berührt. Die grau gezeichneten Tangenten JL_1 und JL_2 sind für die Begründung wichtig, aber nicht für die Konstruktion.

3. Fall: Ein Punkt außerhalb, ein Punkt innerhalb des Kreises

In diesem Fall gibt es keine Lösung.

Konstruktionsschritte:

Gerade d:	Verbindungsgerade der Punkte B und C
Gerade e:	Mittelsenkrechte der Punkte B und C
Punkt F:	Punkt auf Gerade e; der Kreis um F durch B muss den Kreis a schneiden.
Kreis g:	Kreis mit Mittelpunkt F durch den Punkt B
Punkte H_1, H_2:	Schnittpunkte der Kreise a und g
Gerade i:	Verbindungsgerade der Punkte H_1 und H_2
Punkt J:	Schnittpunkt der Geraden d und i
Kreis k:	Thaleskreis über der Strecke $[\mathsf{AJ}]$
Punkte L_1, L_2:	Schnittpunkte der Kreise a und k
Gerade m_1:	Verbindungsgerade der Punkte A und L_1
Punkt Z_1:	Schnittpunkt der Geraden e und m_1
Kreis z_1:	Kreis mit Mittelpunkt Z_1 durch den Punkt B (1. Lösung)
Gerade m_2:	Verbindungsgerade der Punkte A und L_2
Punkt Z_2:	Schnittpunkt der Geraden e und m_2
Kreis z_2:	Kreis mit Mittelpunkt Z_2 durch den Punkt B (2. Lösung)

4 Sonderfälle

Sonderfall 1: Liegt einer der gegebenen Punkte (ohne Beschränkung der Allgemeinheit Punkt B) auf dem Kreis, der andere außerhalb der Kreistangente in B, so gibt es genau eine Lösung, nämlich einen Kreis, der den gegebenen Kreis in B ausschließend berührt. Der Mittelpunkt dieses Lösungskreises ergibt sich durch Schnitt der Geraden AB und der Mittelsenkrechten von B und C.

Sonderfall 2: Liegt einer der gegebenen Punkte (ohne Beschränkung der Allgemeinheit Punkt B) auf dem Kreis, der andere (von B verschieden) auf der Kreistangente in B, so gibt es keine Lösung.

Sonderfall 3: Liegt einer der gegebenen Punkte (ohne Beschränkung der Allgemeinheit Punkt B) auf dem Kreis, der andere innerhalb der Kreistangente in B, aber außerhalb des Kreises, so gibt es genau eine Lösung, nämlich einen Kreis, der den gegebenen Kreis in B einschließend berührt. Der Mittelpunkt dieses Lösungskreises ergibt sich durch Schnitt der Geraden AB und der Mittelsenkrechten von B und C.

Sonderfall 4: Liegen beide gegebenen Punkte (voneinander verschieden) auf dem Kreis, so ist trivialerweise der gegebene Kreis der einzige Lösungskreis.

Sonderfall 5: Liegt einer der gegebenen Punkte (ohne Beschränkung der Allgemeinheit Punkt B) auf dem Kreis, der andere innerhalb des Kreises, so gibt es genau eine Lösung, nämlich einen Kreis, der vom gegebenen Kreis in B einschließend berührt wird. Der Mittelpunkt dieses Lösungskreises ergibt sich durch Schnitt der Geraden AB und der Mittelsenkrechten von B und C.

Bisher wurde stets vorausgesetzt, dass die gegebenen Punkte B und C verschieden sind. In den folgenden Sonderfällen sollen B und C übereinstimmen, was jeweils zu unendlich vielen Lösungskreisen führt.

Sonderfall 6: Liegt der Punkt B(= C) außerhalb des Kreises, so muss der Mittelpunkt Z eines Lösungskreises auf der Hyperbel mit den Brennpunkten A und B und der reellen Halbachse $\frac{1}{2}r_1$ liegen. Je nach Hyperbelast ist die Berührung zwischen Lösungskreis und gegebenem Kreis ausschließend oder einschließend.

Sonderfall 7: Liegt der Punkt B(= C) auf dem Kreis, so muss der Mittelpunkt Z auf der Verbindungsgeraden AB liegen. Die Berührung zwischen Lösungskreis und gegebenem Kreis kann ausschließend oder einschließend sein.

Sonderfall 8: Liegt der Punkt $\mathsf{B}(=\mathsf{C})$ innerhalb des Kreises, so muss der Mittelpunkt Z eines Lösungskreises auf der Ellipse mit den Brennpunkten A und B und der großen Halbachse $\frac{1}{2}r_1$ liegen. Im Spezialfall $\mathsf{A}=\mathsf{B}=\mathsf{C}$ wird aus der Ellipse ein Kreis, nämlich der Kreis mit Mittelpunkt A und Radius $\frac{1}{2}r_1$. Der gegebene Kreis berührt die Lösungskreise einschließend.

5 Algebraische Lösung

Gegeben sind der Kreismittelpunkt $\mathsf{A}(x_1, y_1)$, der Radius r_1 sowie die Punkte $\mathsf{B}(x_2, y_2)$ und $\mathsf{C}(x_3, y_3)$. Für einen Lösungskreis werden die Bezeichnungen $\mathsf{Z}(x, y)$ (Mittelpunkt) und r (Radius) verwendet.

Rechnung für ausschließende Berührung

Ausgangsgleichungen:

Die Ausgangsgleichungen beziehen sich auf die Abstandsquadrate $\overline{\mathsf{ZA}}^2$, $\overline{\mathsf{ZB}}^2$ und $\overline{\mathsf{ZC}}^2$ und folgen aus dem Satz des Pythagoras.

$$
\begin{aligned}
(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= (r_1 + r)^2 && (1)\\
(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 &= r^2 && (2)\\
(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 &= r^2 && (3)
\end{aligned}
$$

1. Folgerung:

Zunächst werden die Gleichungen (2) und (3) gleichgesetzt:

$$
\begin{aligned}
(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 &= (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2\\
x^2 - 2xx_2 + {x_2}^2 + y^2 - 2yy_2 + {y_2}^2 &= x^2 - 2xx_3 + {x_3}^2 + y^2 - 2yy_3 + {y_3}^2\\
2(x_3 - x_2)x + 2(y_3 - y_2)y &= {x_3}^2 + {y_3}^2 - {x_2}^2 - {y_2}^2 && (4)
\end{aligned}
$$

Die erhaltene Gleichung beschreibt die Mittelsenkrechte von B und C.

2. Folgerung:

Als Nächstes subtrahiert man die Gleichung (2) von der Gleichung (1).

$$
\begin{aligned}
(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (x - x_2)^2 - (y - y_2)^2 &= (r_1 + r)^2 - r^2\\
-2x_1x + {x_1}^2 - 2y_1y + {y_1}^2 + 2x_2x - {x_2}^2 + 2y_2y - {y_2}^2 &= {r_1}^2 + 2r_1r
\end{aligned}
$$

Durch Umstellen erhält man daraus:

$$
2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y = {r_1}^2 + 2r_1r - {x_1}^2 - {y_1}^2 + {x_2}^2 + {y_2}^2 \qquad (5)
$$

Weitere Rechnung:

(4) und (5) bilden ein lineares Gleichungssystem, das man nach x und y auflösen kann. Das Ergebnis sind zwei Gleichungen des folgenden Typs:

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta\, r && (6)\\ y &= \gamma + \delta\, r && (7) \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Koeffizienten α, β, γ und δ lassen sich durch die gegebenen Größen ($x_1,\ y_1,\ r_1,\ x_2,\ y_2,\ x_3,\ y_3$) ausdrücken. Die Berechnung von Hand ist ausgesprochen mühsam, weshalb man sinnvollerweise ein Computeralgebrasystem einsetzt.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{N}(-y_2{y_3}^2 + y_1{y_3}^2 + {y_2}^2 y_3 - {y_1}^2 y_3 + {x_2}^2 y_3 - {x_1}^2 y_3 + {r_1}^2 y_3 \\ &\quad - y_1{y_2}^2 + {y_1}^2 y_2 - {x_3}^2 y_2 + {x_1}^2 y_2 - {r_1}^2 y_2 + {x_3}^2 y_1 - {x_2}^2 y_1) && (8)\\ \beta &= \frac{2r_1}{N}(y_3 - y_2) && (9)\\ \gamma &= \frac{1}{N}(x_2{y_3}^2 - x_1{y_3}^2 - x_3{y_2}^2 + x_1{y_2}^2 + x_3{y_1}^2 - x_2{y_1}^2 + x_2{x_3}^2 \\ &\quad - x_1{x_3}^2 - {x_2}^2 x_3 + {x_1}^2 x_3 - {r_1}^2 x_3 + x_1{x_2}^2 - {x_1}^2 x_2 + {r_1}^2 x_2) && (10)\\ \delta &= \frac{2r_1}{N}(x_2 - x_3) && (11) \end{aligned}$$

mit

$$N = 2x_2y_3 - 2x_1y_3 + 2x_1y_2 - 2x_3y_2 + 2x_3y_1 - 2x_2y_1 \qquad (12)$$

Im Falle $N = 0$ sind die Rechenausdrücke in (8), (9), (10) und (11) nicht definiert.

Andernfalls (für $N \neq 0$) kann man diese Beziehungen etwa in Gleichung (2)

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2$$

einsetzen. Auf diese Weise ergibt sich eine quadratische Gleichung für den Radius r, die keine, eine oder zwei Lösungen haben kann.

$$\begin{aligned} &(\beta^2 + \delta^2 - 1)r^2 + (2\alpha\beta + 2\gamma\delta - 2\beta x_2 - 2\delta y_2)r \\ &\quad + ({x_2}^2 + {y_2}^2 + \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha x_2 - 2\gamma y_2) = 0 \qquad (13) \end{aligned}$$

Durch weiteres Einsetzen in (6) und (7) erhält man die Koordinaten des Mittelpunkts.

Einschließende Berührung

Für Lösungen mit einschließender Berührung muss die Ausgangsgleichung (1) geringfügig abgewandelt werden, da der Abstand $\overline{\mathsf{ZA}}$ nun nicht mehr gleich der Summe, sondern gleich der Differenz der Radien r_1 und r, also gleich $|r_1 - r|$ sein muss.

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \quad = \quad (r_1 - r)^2 \tag{14}$$

Es ist jedoch nicht nötig, das neue Gleichungssystem extra durchzurechnen. Stattdessen berücksichtigt man in der quadratischen Gleichung (13) für den Radius auch negative Lösungen und interpretiert diese als Lösungen mit einschließender Berührung. Dabei wird nach (!) Berechnung der Mittelpunktskoordinaten x und y mithilfe von (6) und (7) der negative Radius r durch seinen Betrag ersetzt.

6 Quellen

[1] Wikipedia-Artikel: Apollonisches Problem
de.wikipedia.org/wiki/Apollonisches_Problem
abgerufen am 26. Februar 2022

[2] Wikipedia-Artikel: Apollonios von Perge
de.wikipedia.org/wiki/Apollonios_von_Perge
abgerufen am 26. Februar 2022

[3] Johannes Röttgen-Burtscheidt: Das Apollonische Berührproblem
www2.math.uni-wuppertal.de/~volkert/
Das%20Apollonische%20Beruehrproblem,%202007.pdf
abgerufen am 26. Februar 2022

Letzte Änderung: 5. März 2022